NO: 22-04-16
Date:

<u>Πρόταση</u>: Έστω $\sigma=(i_1, i_2, \ldots, i_k)$: κύκλος μήκους k

$\tau=(j_1, j_2, \ldots, j_l)$: κύκλος μήκους l

Αν οι κύκλοι σ, τ είναι ξένοι, <u>δηλ</u> $\{i_1, i_2, \ldots, i_k\} \cap \{j_1, \ldots, j_l\} = \emptyset$

τότε $\boxed{\sigma \cdot \tau = \tau \cdot \sigma}$

Π = πιθανότητα δύο τυχαία στοιχεία στην S_n να μετατίθενται

$\Pi = \frac{P(n)}{n!}$ | $P(n)$: πλήθος διαμερίσεων του n, όπου διαμέριση του φυσικού n είναι: μια ακολουθία θετικών ακεραίων $n_1, n_2, \ldots, n_k$, όπου απαιτούμε $n_1 \leq n_2 \leq \ldots \leq n_k$ και $n_1 + n_2 + \ldots + n_k = n$

<u>πχ</u>: $p(1) = \frac{1}{1} = 1$, $p(2) = 2$, $p(3) = 3$, $p(4) = 5$, $p(5) = 7$

$p(6) = 11$, $p(10) = 42$

<u>Απόδειξη</u>: Έστω $x \in \{1, 2, \ldots, n\}$

① $x \notin \{i_1, i_2, \ldots, i_k\} \cup \{j_1, j_2, \ldots, j_l\}$. Τότε:

$(\sigma \cdot \tau)(x) = \sigma(\tau(x)) = \sigma(x) = x$

$(\tau\sigma)(x) = \tau(\sigma(x)) = \tau(x) = x$

NO:
Date:

② Αν $x \in \{i_1, i_2, \dots, i_k\}$. Τότε $x \notin \{j_1, j_2, \dots, j_\lambda\}$

Τότε: $(\sigma\tau)(x) = \sigma(\tau(x)) = \sigma(x)$

$(\tau\sigma)(x) = \tau(\sigma(x)) = \sigma(x)$

③ Αν $x \in \{j_1, j_2, \dots, j_\lambda\}$ τότε $x \notin \{i_1, i_2, \dots, i_k\}$ και

τότε: $(\sigma\tau)(x) = \sigma(\tau(x)) = \tau(x)$

$(\tau\sigma)(x) = \tau(\sigma(x)) = \tau(x)$

Άρα, $(\tau\sigma)(x) = (\sigma\tau)(x) \ \forall \ x = 1, 2, \dots, n \Rightarrow \tau \cdot \sigma = \sigma \cdot \tau$

<u>Θεώρημα</u>: Κάθε μετάθεση $\sigma \in S_n$, $\sigma \neq i$ γράφεται ως γινόμενο ξένων ανά δύο κύκλων με μοναδικό τρόπο.

<u>Απόδειξη</u>: Έστω $\sigma \in S_n$, $\sigma \neq i$. Τότε, υπάρχει $x \in \{1, 2, \dots, n\}$ $\sigma(x) \neq x$. Υποθέτουμε $\underline{\sigma(1) \neq 1}$

Θεωρούμε την τροχιά του 1, μέσω της σ: $[1]_\sigma =$

$= \{1, \sigma(1), \dots, \sigma^{k_1 - 1}(1)\} \rightarrow \sigma_1 = (1 \ \sigma(1) \ \sigma^2(1) \dots \sigma^{k_1 - 1}(1))$

Επιλέγουμε ένα στοιχείο $y \in \{1, 2, \dots, n\} \setminus [1]_\sigma : \sigma(y) \neq y$
(αν υπάρχει τέτοιο στοιχείο)

Υποθέτουμε ότι υπάρχει τέτοιο στοιχείο και ότι είναι το 2.

Τότε $2 \notin [1]_\sigma$ και $\sigma(2) \neq 2$ κι η τροχιά του θα είναι
$[2]_\sigma = \{2, \sigma(2), \sigma^{k_2 - 1}(2)\} \mapsto \sigma_2 = (2 \ \sigma(2) \ \sigma^{k_2 - 1}(2))$

NO:
Date:

Συνεχίζοντας αυτή τη διαδικασία, κάποια στιγμή θα φτάσαμε στην τροχιά ενός στοιχείου m,

$m \in \{1,2,\dots,n\} \setminus ([1]_\sigma \cup [2]_\sigma \cup \dots \cup [m-1]_\sigma)$ έτσι ώστε $\sigma(m) \neq m$

Η τροχιά του m θα είναι: $[m]_\sigma = \{m, \sigma(m), \dots, \sigma^{k_m-1}(m)\} \to$

$\to \sigma_m = (m\, \sigma(m) \dots \sigma^{k_m-1}(m))$ και $[1]_\sigma \cup [2]_\sigma \cup \dots \cup [m]_\sigma =$

$= \{1,2,\dots,n\}$

Τότε, οι κύκλοι $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_m$ με μήκη $k_1, k_2, \dots, k_m$ αντίστοιχα είναι ξένοι ανά δύο και: $\sigma = \sigma_1 \cdot \sigma_2 \dots \sigma_m$ διότι το $\sigma(x) = (\sigma_1\, \sigma_2\, \sigma_m)(x)$ $\forall\, x \in \{1,2,\dots,n\}$ και εκ κατασκευής, η γραφή αυτή είναι μοναδική!

<u>Παράδειγμα</u>: $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 3 & 6 & 4 & 7 & 5 & 2 & 7 & 9 & 10 & 8 \end{pmatrix}$

$\sigma(1) = 3 \neq 1$, $[1]_\sigma = \{1,3,4,7\} \to \sigma_1 = (1\ 3\ 4\ 7)$ κύκλος μήκους 4

$2 \in \{1,2,\dots,10\} \setminus [1]_\sigma$ και $\sigma(2) = 6 \neq 2$

$[2]_\sigma = \{2,6\} \to \sigma_2 = (2\ 6)$ κύκλος μήκους 2

$8 \in \{1,2,\dots,10\} \setminus [1]_\sigma \cup [2]_\sigma \cup [5]_\sigma$

$\sigma(8) = 9 \neq 8$, $[8]_\sigma = \{9,10\} \to \sigma_3 = (8\ 9\ 10)$ κύκλος μήκους 3

NO:
Date:

$\sigma = \sigma_1 \sigma_2 \sigma_3$: ανάλυση σε ανα δύο ξένους κύκλους της σ

$= (1\ 3\ 4\ 7)(2\ 6)(8\ 9\ 10)$

· <u>Πρόταση</u>: Αν $\sigma = (i_1, i_2, \ldots, i_k)$ κύκλος μήκους k, τότε : $o(\sigma) = k$

<u>Απόδειξη</u>: Θδο : $k = \min\{m \in N \mid \sigma^m = i\}$. <u>Θδο</u> πρώτα $\sigma^k = i$

Προφανώς $\sigma^k(j) = j \ \forall j \in \{1, 2, \ldots, n\} - \{i_1, i_2, \ldots, i_k\}$

① $\sigma(i_k) = i_1$, $\sigma^2(i_k) = \sigma(i_1) = i_2, \ldots, \sigma^{k-1}(i_k) = i_{k-1}$, $\sigma^k(i_k) = i_k$

② $\sigma(i_1) = i_2$, $\sigma^2(i_1) = \sigma(i_2) = i_3, \ldots, \sigma^{k-1}(i_1) = i_k$, $\sigma^k(i_1) = \sigma(i_k) = i$

Παρόμοια, $\sigma^k(\lambda) = \lambda \ \forall \lambda = i_2, \ldots, i_{k-1}$.

Επομένως, $\sigma^k(j) = j \ \forall j \in \{i_1, i_2, \ldots, i_k\}$

$\Rightarrow \sigma^k = i$ και ο k είναι ο μικρότερος θετικός ακέραιος με αυτή την ιδιότητα $\Rightarrow$ $\underline{o(\sigma) = k}$

<u>Πρόταση</u>: Έστω σ, τ : ξένοι κύκλοι. Τότε Θδο: $o(\sigma\tau) = [o(\sigma), o(\tau)]$

<u>Απόδειξη</u>: Έστω ότι $\sigma = (i_1, i_2, \ldots, i_x)$ κι άρα $o(\sigma) = x$
$\tau = (j_1, j_2, \ldots, j_y)$ -״- $o(\tau) = y$

και $\{i_1, i_2, \ldots, i_x\} \cap \{j_1, j_2, \ldots, j_y\} = \emptyset$

NO:
Date:

Έστω ότι: $\kappa \overset{op}{=} [x,y] \Rightarrow \kappa = x\mu = y\nu \quad , \mu, \nu \geq 1$

$(\sigma\tau)^\kappa = \underbrace{(\sigma\tau)(\sigma\tau)\dots(\sigma\tau)}_{\kappa-\text{φορές}} \xrightarrow{\sigma\tau=\tau\sigma} \sigma^\kappa \tau^\kappa = \sigma^{x\mu}\tau^{y\nu} = (\sigma^x)^\mu (\tau^y)^\nu =$

$= i^\mu i^\nu = i$

Έστω ότι $m \geq 1 : (\sigma\tau)^m = i \Rightarrow \sigma^m \tau^m = i \xrightarrow{\cdot \tau^{-m}}$

$\Rightarrow \sigma^m = \tau^{-m}$. Αυτό συμβαίνει μόνο όταν $\sigma^m = \tau^{-m} = i$

~> Η σ, άρα κι η σ^m μεταθέτει τα στοιχεία $\{i_1, i_2, i_x\}$ κι αφήνει σταθερά τα υπόλοιπα

~> Η τ, άρα και η τ^m μεταθέτει τα στοιχεία $\{j_1, j_2, \dots, j_y\}$ κι αφήνει σταθερά τα υπόλοιπα.

Επειδή τα σύνολα $\{i_1, i_2, \dots, i_x\}$ και $\{j_1, j_2, \dots, j_y\}$ είναι ξένα και $\sigma^m = \tau^{-m} \Rightarrow \sigma^m = \tau^m = i$

Άρα $\left.\begin{array}{l} \sigma^m = i \Rightarrow o(\sigma) = x \mid m \\ \tau^{-m} = i \Rightarrow (\tau^{-1})^m = i \Rightarrow o(\tau^{-1}) = o(\tau) = y \mid m \end{array}\right\} [x,y] \mid m \Rightarrow \kappa \mid m \Rightarrow \kappa \leq m$

Πράγματι $\kappa = [x,y] = [o(x), o(y)] = o(\sigma\tau)$

<u>Πρόταση</u>: Αν $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_k$ είναι ανά δύο ξένοι κύκλοι τότε: $o(\sigma_1 \sigma_2 \dots \sigma_k) = [o(\sigma_1), o(\sigma_2), \dots, o(\sigma_k)]$

Απόδειξη: Με χρήση επαγωγής

NO:
Date:

<u>Παράδειγμα</u>: ① $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 9 & 1 & 4 & 5 & 3 & 7 & 6 & 10 & 2 & 8 \end{pmatrix}$

$\sigma = (1\,9\,2)(3\,4\,5)(6\,7)(8\,10)$: $o(\sigma) = [3,3,2,2] = 6$

② $\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 7 & 6 & 3 & 4 & 5 & 1 & 10 & 9 & 2 & 8 \end{pmatrix}$

$\tau = (1\,7\,10\,8\,9\,2\,6) \rightarrow$ μήκος 7

$\tau \cdot \sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 2 & 7 & 4 & 5 & 3 & 10 & 1 & 8 & 6 & 9 \end{pmatrix} =$

$= (1\,2\,7)(3\,4\,5)(6\,10\,9)$, $o(\sigma\tau) = 3$

<u>Λήμμα</u>: $(i_1\, i_2 \dots i_k)^{-1} = (i_k\, i_{k-1} \dots i_2\, i_1)$

<u>Απόδειξη</u>: $\gamma = (i_1\, i_2 \dots i_k)$, τότε: $(i_k\, i_{k-1} \dots i_2)(i_1 \dots i_k)$

$= \begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \dots & i_k \\ i_1 & i_2 & \dots & i_k \end{pmatrix} = i$

Αν G ομάδα και $x, y \in G$, τα x, y καλούνται συζυγή

$\Leftrightarrow \exists\, g \in G : g x g^{-1} = y$

→ <u>Σημαντική Ιδιότητα</u>: Συζυγή στοιχεία σε μια ομάδα έχουν την ίδια τάξη.

$H = \langle y \rangle$ $\forall g \in G$: $|gHg^{-1}| = |H| \Rightarrow |\langle x \rangle| = |\langle y \rangle| \Rightarrow o(x) = o(y)$

<u>Θεώρημα</u>: Έστω $(i_1\ i_2 \dots i_r)$ κύκλος μήκους r στην S_n

Τότε $\forall \sigma \in S_n$: $\sigma(i_1\ i_2 \dots i_r)\sigma^{-1} = (\sigma(i_1)\ \sigma(i_2) \dots \sigma(i_r))$

<u>Απόδειξη</u>: Έστω $\pi = \sigma(i_1\ i_2 \dots i_r)\sigma^{-1}$

① $\forall j \neq \sigma(i_1), \sigma(i_2), \dots, \sigma(i_r)$: $(\sigma(i_1)\sigma(i_2)\dots\sigma(i_r))(j) = j$

$\pi(j) = j$, διότι επειδή $j \neq \sigma(i_1), \sigma(i_2), \dots, \sigma(i_r) \Rightarrow$

$\Rightarrow \sigma^{-1}(j) \neq i_1,\ \sigma^{-1}(j) \neq i_2, \dots, \sigma^{-1}(j) \neq i_r$

Άρα, $\pi(j) = \sigma(i_1\ i_2 \dots i_r)\sigma^{-1}(j) = \sigma(\sigma^{-1}(j)) = j$

② Αν $j = \sigma(i_k)$, όπου $1 \leq k \leq r$

Τότε $(\sigma(i_1)\ \sigma(i_2) \dots \sigma(i_r))\underset{\hookrightarrow \sigma(i_k)}{(j)} = \sigma(i_{k+1})$

$\pi(j) = \sigma(i_1\ i_2 \dots i_r)\sigma^{-1}(j) = \sigma(i_1\ i_2 \dots i_r)(i_k) = \sigma(i_{k+1})$

Άρα $(\sigma(i_1\ i_2 \dots i_k)\sigma^{-1})(j) = (\sigma(i_1)\dots\sigma(i_r))(j), \forall j = 1, 2, \dots, n \Rightarrow$

$\Rightarrow \sigma(i_1\ i_2 \dots i_n)\sigma^{-1} = (\sigma(i_1)\dots\sigma(i_r))$

<u>Πόρισμα</u>: Έστω $\sigma, \tau \in S_n$ κι έστω $\tau = \tau_1 \tau_2 \dots \tau_k$ γινόμενο ξένων κύκλων.

Τότε: $\sigma\tau\sigma^{-1} = \sigma\tau_1\tau_2\dots\tau_k\sigma^{-1} = (\sigma\tau_1\sigma^{-1})(\sigma\tau_2\sigma^{-1})\dots(\sigma\tau_k\sigma^{-1})$

NO:
Date:

Παράδειγμα: $\sigma=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7&8&9&10\\9&1&4&5&3&7&6&10&2&8\end{pmatrix}$

$\tau=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7&8&9&10\\2&7&4&5&3&10&1&8&9&6\end{pmatrix}$

$\sigma\tau\sigma^{-1}=?$, $\tau=\underset{\tau_1}{(1\,2\,7)}\underset{\tau_2}{(3\,4\,5)}\underset{\tau_3}{(6\,10)}$

$\sigma\tau\sigma^{-1}=(\sigma(1\,2\,7)\sigma^{-1})(\sigma(3\,4\,5)\sigma^{-1})(\sigma(6\,10)\sigma^{-1})=$

$=(\sigma(1)\sigma(2)\sigma(7))(\sigma(3)\sigma(4)\sigma(5))(\sigma(6)\sigma(10))=(9\,1\,6)(4\,5\,3)(7\,8)$

Πρόταση: Αν $(a_1\,a_2\dots a_k)$, $(b_1\,b_2\dots b_k)$ κύκλοι μήκους k στην S_n, $n\geq 2$, τότε $\exists\ \sigma\in S_n: \sigma(a_1\dots a_k)\sigma^{-1}=(b_1\,b_2\dots b_k)$

Απόδειξη: Ορίζουμε μετάθεση $\sigma\in S_n$ ως εξής

$\sigma(a_1)=b_1,\ \sigma(a_2)=b_2,\dots\ \sigma(a_k)=b_k$

Τα σύνολα $\{1,2,\dots,n\}-\{a_1,\dots,a_k\}$ και $\{1,2,\dots,n\}-\{b_1,\dots,b_k\}$ έχουν το ίδιο πλήθος στοιχείων

Άρα υπάρχει 1-1 κι επί απεικόνιση f,

$f:\{1,\dots,n\}-\{a_1,\dots,a_k\}\to\{1,\dots,n\}-\{b_1,\dots,b_k\}$

Ορίζουμε $\sigma(x)=f(x)$, $\forall\ x\in\{1,2,\dots,n\}-\{a_1,\dots,a_k\}$

Τότε: $\sigma\in S_n$ και $\sigma(a_1,\dots,a_k)\sigma^{-1}=(b_1,\dots,b_k)$

Άρα δύο κύκλοι στην S_n είναι συζυγείς μεταθέσεις αν-ν έχουν ίδιο μήκος.

NO:
Date:

Θεώρημα: Δύο μεταθέσεις στην S_n είναι συζυγείς $\iff$ έχουν την ίδια ανάλυση σε ξένους κύκλους.

Δηλαδή: $\sigma = \sigma_1 \sigma_2 \ldots \sigma_k$: ανάλυση σε ξένους (ανά δύο) κύκλους

όπου $\ell(\sigma_i) = \ell_i$, $1 \le i \le k$

$\tau = \tau_1 \tau_2 \ldots \tau_\lambda$: Ανάλυση σε ξένους (ανά δύο) κύκλους

όπου $\ell(\tau_j) = \mu_j$, $1 \le j \le \lambda$

Τότε $k = \lambda$, $\ell(\sigma_i) = \ell(\tau_j)$, $1 \le i \le k$

Αν $\sigma = \sigma_1 \sigma_2 \ldots \sigma_k \sigma_{k+1} \ldots \sigma_n$, όπου $\sigma_{k+1} \ldots \sigma_n \to$ κύκλοι μήκους 1

$(1, 1, \ldots, 1, \ell_1, \ell_2, \ldots, \ell_k)$, $\ell_1 \le \ell_2 \le \ldots \le \ell_k$
$\to$ διαμέριση του n

Οι σ, τ είναι συζυγείς $\iff$ οι σ, τ ορίζουν την ίδια διαμέριση του n.

Λήμμα: Κάθε κύκλος στην S_n είναι γινόμενο αντιμεταθέσεων (κύκλοι μήκους 2)

Απόδειξη: $(a_1 a_2 \ldots a_k) = (a_1\, a_k)(a_1\, a_{k-1}) \ldots (a_1\, a_3)(a_1\, a_2)$

NO:
Date:

Πρόταση: Κάθε μετάθεση στην S_n είναι γινόμενο αντιμεταθέσεων

Απόδειξη: Για $n \geq 2$

Αν $\sigma \in S_n$, $\sigma \neq i$, τότε $\sigma = \sigma_1 \sigma_2 \ldots \sigma_k$, σ_i: ξένοι ανά δύο κύκλοι

Επειδή κάθε κύκλος είναι γινόμενο αντιμεταθέσεων

$\Rightarrow \sigma$: γινόμενο αντιμεταθέσεων

$i = (12)(21)$

$S_3 = \{i, (2\,3), (1\,2), (1\,2\,3), (1\,3\,2)\}$

Παράδειγμα: ① $\sigma = (1\,2\,3) \in S_3$: $\sigma(1\,2\,3) = (13)(12) =$
$= (12)(23)$

② $\sigma = (1\,5\,2\,4\,3) = (1\,3)(1\,4)(1\,2)(1\,5)$

$= (1\,5)(5\,2)(2\,4)(4\,3) =$

$= (12)(34)(23)(12)(23)(34)(45)(34)(23)(12)$